Analiza Matematyczna I.2, kolokwium, 4 kwietnia 2012, 16:05 — 18:35

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

0. Podać definicję jednostajnie zbieżnego ciągu funkcyjnego.
Niech $f_n(x) = 1 + x^{-1} + x^{-2} + \ldots + x^{-n}$.
Dla jakich $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ istnieje granica punktowa tego ciągu funkcyjnego?
Na jakich przedziałach ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny? (Przedziały mogą zawierać swe końce lub nie, mogą być ograniczone lub nie).
Niech D oznacza zbiór tych wszystkich $x \in \mathbb{R}$, dla których istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. W jakich punktach zbioru D funkcja $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ jest ciągła?

---

1. Podać definicję funkcji wypukłej.
Dla każdej liczby $n = 1, 2, \ldots$ funkcja $f_n\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła. Dla każdego $x \in (a,b)$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$. Udowodnić, że funkcja f jest ciągła.

---

2. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} \cdot \ln x$, $g(x) = \sqrt[3]{x^2+x} \cdot \ln x$. Czy te funkcje są jednostajnie ciągłe na
(a) przedziale $(0,1]$? (b) półprostej $[1,+\infty)$?

---

3. Wykazać, że dla $0 < |x| < 1$ zachodzi następująca nierówność

$$\left| \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right| > |\sin x| .$$

---

4. Niech $f(x) = \cos^3 x$. Rozwinąć funkcję f w szereg Taylora wokół punktu 0 i obliczyć $f^{(2012)}(0)$ i $f^{(2013)}(0)$.

---

5. Dowieść, że jeśli $\alpha, \beta, \gamma \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, to $\operatorname{tg}^3(\alpha+\beta+\gamma) \le \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$.

---

6. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx - \lfloor nx \rfloor}{n^2}$.